page 394 1/3 - 1992.
I. N. A Générale Math 1

MATHÉMATIQUES

PREMIERE COMPOSITION
(Option générale)

Durée : 3 heures

Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$.
Par abus de langage, on identifie un polynôme P, élément de $\mathbb{R}[X]$, et la fonction polynôme $t \mapsto P(t)$ associée.

n étant un entier positif ou nul, si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant une dérivée d'ordre n, celle-ci est notée $f^{(n)}$; la dérivée première sera donc notée indifféremment f' ou $f^{(1)}$, la dérivée seconde f'' ou $f^{(2)}$; par convention, $f^{(0)} = f$.

On rappelle que $E(x)$ désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire, l'unique entier relatif vérifiant

$$E(x) \leq x < E(x)+1.$$

On définit, dans tout le problème, une application Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

I. Etude des dérivées de Φ .

1.1 Montrer l'existence d'un polynôme P_n tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \phi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n P_n(t)}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Exprimer $P_{n+1}(t)$ à l'aide de $P_n(t)$ et de $P'_n(t)$.

Montrer que P_n est de degré n, et déterminer le coefficient, noté $a_{n,0}$, de son terme de plus haut degré.

Montrer que P_n est un polynôme pair si n est pair, impair si n est impair.

1.2 Vérifier l'égalité : $(t^2 + 1)\ \Phi'(t) + t\ \Phi(t) = 0.$

En employant la formule de Leibniz relative à la dérivée d'ordre n d'un produit de deux fonctions, en déduire que, si $n \geq 1$, P_n vérifie la relation de récurrence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(t) - (2n + 1)tP_n(t) + n^2(t^2 + 1)\ P_{n-1}(t) = 0 .$$

1.3 En déduire que, si $n \geq 1$: $P'_n(t) = n^2 P_{n-1}(t)$.

1.4 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, les polynômes $P_n(t)$, ~~$P'_n(t)$ et $P''_n(t)$~~ vérifient l'équation différentielle

(E_n) $\quad (t^2+1)y'' - (2n-1)t\,y' + n^2 y = 0.$

1.5 On pose : $P_n(t) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} a_{n,k}\, t^{n-2k}$.

A l'aide de l'équation différentielle (E_n), exprimer, pour $k \geq 1$, $a_{n,k}$ en fonction de $a_{n,k-1}$, n et k.

En déduire une expression des coefficients $a_{n,k}$.

II Etude des racines de P_n.

2.1 Expliciter $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ et $P_4(t)$.

Calculer, par radicaux carrés s'il y a lieu, les zéros de P_2, P_3, P_4.

Constater que ceux-ci sont réels et simples. Donner les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près par défaut des valeurs absolues des zéros trouvés.

2.2 On se propose d'étudier, pour n quelconque tel que $n \geq 1$, la réalité des zéros de P_n.

a. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à (n-1).
Montrer que l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)P_n(t)}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}\,dt \quad \text{est convergente.}$$

A l'aide d'une suite d'intégrations par parties, calculer I, et vérifier que la valeur de cette intégrale ne dépend pas du polynôme P.

b. On appelle $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des zéros de P_n réels et d'ordre de multiplicité impair.
Montrer que $\mathcal{E}_n$ est non vide.
Pour cela, on raisonnera par l'absurde, et, en supposant $\mathcal{E}_n$ vide, on montrera qu'on aurait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(t)dt}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}} > 0\,,$$

puis on relèvera une contradiction.

Tournez la page S.V.P.

c. On pose donc, m étant un entier tel que $1 \leq m \leq n$,

$$\mathcal{E}_n = \left\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\right\} \text{ avec } \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m .$$

Montrer que $m = n$.
A cet effet, en supposant que $m \leq n - 1$, on posera :

$$S_n(t) = \prod_{k=1}^{m}\left(t - \alpha_k\right),$$

puis on considérera l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_n(t)P_n(t)}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}\,dt.$

d. Déduire de ce qui précède que les zéros de P_n sont tous réels et simples.

2.3 On suppose ici $n \geq 2$.

Les zéros de P_n sont notés $\{\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n\}$ avec $\alpha_1<\alpha_2<..<\alpha_n$.

Ceux de P_{n-1} sont $\{\beta_1,\beta_2,..,\beta_{n-1}\}$, avec $\beta_1<\beta_2<..<\beta_{n-1}$.

Montrer que, si $1 \leq i \leq n-1$, $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$.

Le résultat confirme-t-il celui de la question **2.1.**?